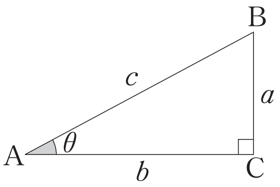
PART4 三角比の相互関係

要点 ① 三角比の相互関係

右の図の直角三角形において



$a=\quad c$

$b=\quad c$

である。よって

$$\tan\theta=\frac{}{}=\frac{c\sin\theta}{c\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\quad\cdots\cdots①$$

また，三平方の定理により $a^2+b^2=c^2$ であるから

$$(c\sin\theta)^2+(c\cos\theta)^2=c^2$$

$$c^2(\sin\theta)^2+c^2(\cos\theta)^2=c^2$$

両辺を c^2 で割って　$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1\quad\cdots\cdots②$

さらにこの等式の両辺を $(\cos\theta)^2$ で割ると

$$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+1^2=\frac{1}{(\cos\theta)^2}\quad すなわち\ (\tan\theta)^2+1=\frac{1}{(\cos\theta)^2}\quad\cdots\cdots③$$

$(\sin\theta)^2$，$(\cos\theta)^2$，$(\tan\theta)^2$ を，それぞれ　　　，　　　，　　　と表すと，①，②，③より，次の公式が成り立つ。

> **三角比の相互関係**
>
> **1**　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　**2**　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　　**3**　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

三角比の相互関係を用いると，θ が鋭角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうちどれか 1 つの値から，他の 2 つの値を求めることができる。

例　θ が鋭角で，$\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求める。

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから

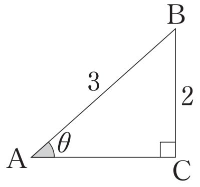
$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

また　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{2}{3} \div \dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

※θ が鋭角で，$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき，右図において三平方の定理により



AC＝

よって　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

4 (1) θ が鋭角で，$\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) θ が鋭角で，$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

Point Pickup

三角比の相互関係

1 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ **2** $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ **3** $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

θ が鋭角のとき，この関係を用いることにより，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうちどれか１つの値がわかると，他の２つの値を求めることができる。

第11講　PART4 確認問題

1　θ が鋭角で，$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ のとき，

$$\sin\theta = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad \tan\theta = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。

2　θ が鋭角で，$\tan\theta = \sqrt{2}$ のとき，

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}},\quad \cos\theta = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}$$

である。

PART4 三角比の相互関係

4 (1) θ が鋭角で，$\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) θ が鋭角で，$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

[解答]

(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{1}{4}\right)^2=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

θ は鋭角より，$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}\div\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}\times4=\sqrt{15}$

(2) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ であるから

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{4}{9}$

θ は鋭角より，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\frac{2}{3}$$

また $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であるから

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

第11講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：5，ウ：4，エ：3

[解説]

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから，[A]

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$$

$$=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$$

θ は鋭角より，$\sin\theta>0$ であるから，

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

また，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ [B]

$$=\frac{4}{5}\div\frac{3}{5}=\frac{4}{3}$$

> [A]　三角比の相互関係
> $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

> [B]　三角比の相互関係
> $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

2

[正解] オ：6，カ：3，キ：1，ク：3

[解説]

$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ であるから，[C]

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$$

$$=1+(\sqrt{2})^2=3$$

$$\cos^2\theta=\frac{1}{3}$$

θ は鋭角より，$\cos\theta>0$ であるから，

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

また，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であるから，[D]

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$$

$$=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

> [C]　三角比の相互関係
> $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$

> [D]　$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ から $\sin\theta$ を求める。